

Modelo de Autómata Celular 1-dimensional para una EDP hiperbólica

I. Huerta-Trujillo¹, J.C. Chimal-Eguía¹, S.V. Flores-Cortes¹, and N. Sanchez-Salas²

*ihuerta@ipn.mx, chimal@cic.ipn.mx, sfloresco@ipn.mx,
norma@esfm.ipn.mx*

¹ Centro de Investigación en Computación

Av. Juan de Dios Bátiz s/n casi esq. Miguel Othón de Mendizábal, U. P. Adolfo López Mateos, Del. Gustavo A. Madero, C.P. 07738, México D.F.

² Escuela Superior de Física y Matemáticas

Av. Instituto Politécnico Nacional Edificio 9, U. P. Adolfo López Mateos, Del. Gustavo A. Madero, C.P. 07738, México D.F.

Abstract. In this paper, we briefly describe the classic study of a vibrating string by partial differential equations whose evolution in time and under certain boundary conditions can have a very complicated analytical solution. However, we can see that by using a discrete model as a cellular automaton with simple transition rules we can study the same system without need to incorporate the intrinsic complexity of partial differential equations. Thus, we observed how the dynamics of the whole phenomenon is reflected in the simulation of collective effects of individual elements.

En este artículo, se presenta de manera breve el estudio clásico de una cuerda vibrante mediante ecuaciones diferenciales parciales hiperbólicas cuya evolución en el tiempo y bajo ciertas condiciones de frontera puede tener una solución analítica complicada. Sin embargo, podemos observar que mediante el uso de un modelo discreto como un autómata celular con reglas de transición simples se puede estudiar el mismo sistema sin necesidad de incorporar la complejidad intrínseca de las ecuaciones diferenciales parciales. Es decir, observamos como la dinámica de todo el fenómeno se traduce en la simulación de efectos colectivos de elementos discretos.

Keywords: simulación; cuerda vibrante; autómatas celulares; EDP hiperbólica; simulating; vibrant string; cellular automata; PDE hyperbolic.

1 Introducción

La simulación por computadora es una de las estrategias de las que dispone la ciencia actual para predecir sucesos en sistemas con un alto grado de complejidad. Esta complejidad es tal que la matemática clásica no resulta suficiente

para expresar todos los fenómenos que ocurrirán en el sistema en este sentido la simulación nos auxilia para ver los comportamientos de los sistemas deseados.

Shannon define el proceso de simulación como: *el proceso de diseñar un modelo de un sistema real y llevar a término experiencias con él, con la finalidad de comprender el comportamiento del sistema o evaluar nuevas estrategias -dentro de los límites impuestos por un cierto criterio o un conjunto de ellos - para el funcionamiento del sistema [7].*

La simulación consiste en la experimentación aplicada a los modelos del sistema o fenómeno que se quiere estudiar con el objeto de obtener información que ayude a entender este sistema. La simulación está fuertemente ligada a un proceso iterativo compuesto por el diseño del modelo, ejecución del modelo, análisis de la ejecución [5].

Frecuentemente los modelos matemáticos empleados para describir las vibraciones de un sistema físico incluyen ecuaciones diferenciales parciales no lineales, tradicionalmente se ha usado el método de elemento finito para resolver este tipo de problemas, la principal dificultad con dicho método se presenta al hacer el análisis para plantear la ecuación diferencial a resolver, la cual depende tanto de la geometría del sistema como de las condiciones de frontera y de las condiciones iniciales, [3].

Las ecuaciones diferenciales están intrínsecamente relacionadas con modelos continuos, al resolverlas numéricamente solo se resuelven sobre un punto o grupo de puntos de un conjunto compuesto por un continuo infinito[11], por lo que las soluciones resultan ser aproximadas.

Los modelos de escala celular o modelos discretos, consideran que el elemento (no el fenómeno en sí) juega un papel fundamental, dado que la dinámica de todo el fenómeno se observa en la simulación de efectos colectivos [9].

Curiosamente, los autómatas celulares tienen la capacidad de representar comportamientos complejos a partir de una dinámica sencilla. Debido a esto, desde su origen se les ha utilizado como elementos de la computación para la modelación de fenómenos biológicos y físicos. Además, los autómatas celulares son estudiados como objetos matemáticos debido al interés intrínseco relativo a los aspectos formales de su comportamiento

Los modelos basados en autómatas celulares han resultado apropiados en sistemas físicos con un régimen altamente no lineal, también en sistemas químicos y biológicos donde tienen lugar umbrales discretos [13].

Un autómata celular (AC), es un sistema dinámico discreto, que consiste en un arreglo de células (nodos) en alguna dimensión d [4]. Wolfram [12] los define como idealizaciones matemáticas de sistemas físicos, cuyo espacio y tiempo son discretos, en donde las cantidades físicas se pueden circunscribir a un conjunto finito de valores.

El concepto de AC lleva implícitamente asociado otros conceptos, como espacio y localidad de influencia. Se asume que el sistema representado está distribuido en el espacio y que regiones cercanas tienen mayor influencia entre sí, que otras que se encuentren apartadas dentro del sistema[1].

Para definir un AC es necesario definir otros elementos que lo integran, tales como:

- Una lattice (retícula) regular de N máquinas de estado finito idénticas, llamadas células [8], que cubre el espacio d -dimensional; cada una de las células cuenta con patrones idénticos y conexiones locales con otras células.
- Un conjunto de estados que pueden ser asignados a cada célula.
- Una regla de transición, que especifica la evolución en el tiempo de los estados.
- Una vecindad; las interacciones locales que toda célula tiene es con células que pertenecen solo a su vecindad (área de influencia).

Estas características son las que en conjunto dan forma a un AC.

1.1 Definición Formal de Autómata Celular

Definición 11 Una “lattice” o “retícula” es un arreglo uniforme, generalmente infinito [12], formado por objetos idénticos llamados “células”. Este arreglo puede ser n -dimensional, pero para efectos de simulación de sistemas naturales se implementa de 1, 2 ó 3 dimensiones, de tamaño finito.

Definición 12 Una vecindad para una célula $c \in L$ es $V(c) = \{k_0, k_1, \dots, k_n \mid k_j \in L, j = 0, 1, \dots, n\}$; es decir, una vecindad es un conjunto de células para las cuales la célula c es el punto de referencia para el área de influencia.

En el caso de AC 1-dimensionales, la vecindad para la i -ésima célula (la vecindad incluye a la célula i , sin embargo, la actualización por la función no depende del estado de i en el tiempo t), puede estar compuesta por las células adyacentes a ésta en el lado derecho e izquierdo (se busca que esta vecindad respete la simetría respecto a la célula central, aunque no es obligatorio), por lo que se dice que esta vecindad es de radio r , es decir:

$$V(c) = \{c_{i-r}, \dots, c_{i-1}, c_i, c_{i+1}, \dots, c_{i+r}\}$$

La definición de lattice por si misma nos permite considerar lattices de tamaño infinito, pero en la práctica esta implementación resulta imposible, es por eso que los AC son representados como sistemas en espacios finitos, a estas condiciones que nos permiten limitar el espacio de operación del AC las llamamos *condiciones de frontera*. Para el caso de nuestro modelo se define una frontera cerrada (véase [3]).

Definición 13 La función de transición en un AC 1-dimensional es local y se aplica simultáneamente de acuerdo a la siguiente ecuación:

$$c_j^{t+1} = \Phi(c_{j+\delta_1}^t + c_{j+\delta_2}^t + \dots + c_{j+\delta_q}^t) \quad (1)$$

donde $j + \delta_k$ representa las células que conforman la vecindad de c_j .

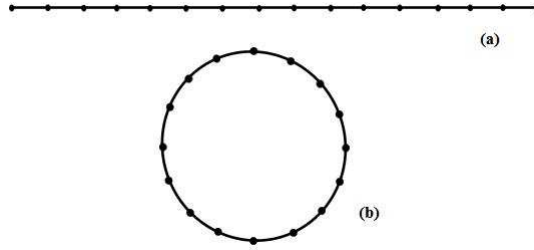


Fig. 1. Representación de un AC 1-dimensional (a) con condiciones de frontera periódica (b).

Definición 14 Un AC es una 4-tupla $AC = (L, S, V, \Phi)$ donde:

- L : Es una retícula regular y $L = \{c \in \mathbb{C}^d\}$ para una lattice d -dimensional.
- S : Es el conjunto finito de todos los posibles estados de las células, $c \in L$.
- V : Es el conjunto finito de células que definen la vecindad para una célula.
- Φ : $S^d \rightarrow S$, es una función de transición aplicada simultáneamente a las células que conforman la lattice.

La actualización en el estado de las células requiere que se conozca el estado de las células vecinas, a esta región del espacio que la célula necesita conocer se le conoce como *vecindad* [3].

En este artículo, se presenta de manera breve el estudio clásico de una cuerda vibrante mediante ecuaciones diferenciales parciales cuya evolución en el tiempo y bajo ciertas condiciones de frontera puede tener una solución analítica muy complicada. Sin embargo, podemos observar que mediante el uso de un modelo discreto como un autómata celular con reglas de transición relativamente simples se puede estudiar el mismo sistema sin necesidad de incorporar la complejidad intrínseca de las ecuaciones diferenciales parciales. Es decir, observamos como la dinámica de todo el fenómeno se traduce en la simulación de efectos colectivos de elementos discretos. Este modelo de autómata celular para estudiar un modelo dinámico no tan simple como el de una cuerda vibrante, puede conducirnos a una moraleja muy interesante, a saber: ¿Podemos estudiar sistemas complejos, dinámicamente representados por ecuaciones diferenciales parciales, mediante sistemas discretos como los autómatas celulares?, si la respuesta es afirmativa, entonces nos encontramos frente a una nueva manera alternativa de estudiar sistemas físicos complejos (como las ecuaciones de Navier-Stokes) mediante sistemas discretos como los autómatas celulares, pero con el poder computacional actual como plataforma de trabajo.

El artículo está organizado de la siguiente manera: En la sección 1 se presenta una breve introducción de los autómatas celulares y del problema que se pretende resolver. En la sección 2, presentamos de forma breve el modelo analítico de la cuerda vibrante. En la sección 3, presentamos el modelo de un autómata celular

que representa a una cuerda vibrante, la sección 4 se presenta la definición del modelo de AC propuesto, la sección 5. Finalmente en la sección 6, se presentan algunas conclusiones de este trabajo.

2 Modelo Tradicional

El modelo del sistema físico para una cuerda vibrante se representa a través de una ecuación diferencial parcial hiperbólica. Algunas formas de esta ecuación o una generalización de ella se obtienen siempre inevitablemente en cualquier análisis matemático de fenómenos que involucren propagación de ondas en un medio continuo [2].

Considérese una cuerda elástica perfectamente flexible, extendida firmemente entre soportes fijos al mismo nivel (Figura 2). El eje x está localizado a lo largo de la cuerda, con los extremos de esta sujetos, si la cuerda es puesta en movimiento en un tiempo inicial, vibrará libremente en un plano vertical libremente si la resistencia del aire es despreciada.

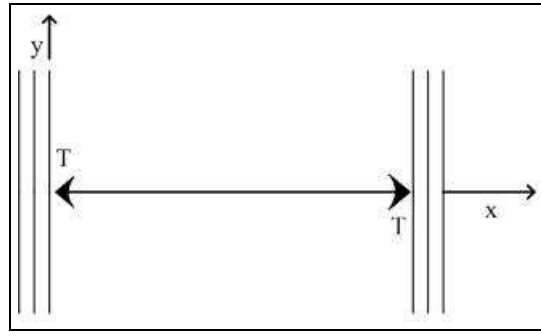


Fig. 2. Cuerda sujeta en ambos extremos.

El modelo matemático que rige el movimiento de esta cuerda está dado por la ecuación (2) y se conoce como ecuación de onda en una dimensión [6].

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (2)$$

Donde $u(x, t)$ es el desplazamiento respecto a la posición de equilibrio y $c^2 = T/\rho$, con ρ = masa de la cuerda por unidad de longitud y T la tensión de la cuerda. Las condiciones de frontera del sistema son:

$$u(0, t) = 0 \quad \text{y} \quad u(l, t) = 0 \quad \forall t \geq 0 \quad (3)$$

Es decir, los extremos se encuentran fijos en todo momento.

Las condiciones iniciales para el sistema son:

$$u(x, 0) = f(x) \quad \text{y} \quad \left. \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = g(x) \quad (4)$$

Donde $f(x)$ es la ecuación que marca la posición inicial de todos los puntos al inicio del análisis del sistema y $g(x)$ es la velocidad inicial del sistema.

El caso que nos interesa en este momento es el caso para una cuerda de longitud l con una deflexión inicial triangular y velocidad inicial igual a cero (Figura 3).

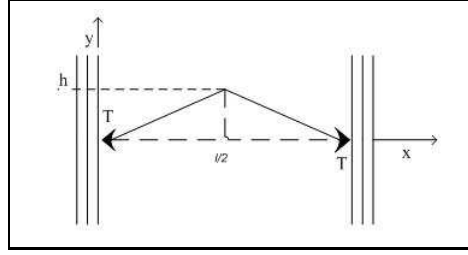


Fig. 3. Cuerda con deflexión inicial triangular.

Las condiciones iniciales para el sistema son:

$$u(x, 0) = f(x) = \begin{cases} \frac{2h}{l}x : & \text{para } 0 < x \leq \frac{1}{2}l \\ \frac{2h}{l}(l-x) : & \text{para } \frac{1}{2}l < x < l \end{cases} \quad (5)$$

$$\left. \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = g(X) = 0 \quad (6)$$

la solución que satisface a la ecuación (2) es:

$$u(x, t) = \frac{8h}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \sin\left(\frac{n}{2}\pi\right) \cos\left(\frac{n\pi}{l}ct\right) \quad (7)$$

Cabe resaltar que esta ecuación es una serie infinita y el resultado se aproxima si tendemos a tomar un número lo suficientemente grande de términos en la serie, y evaluar las derivadas parciales para cada punto del cual deseemos conocer su posición en cualquier instante de tiempo.

3 Modelo de Autómata celular para una cuerda vibrante

3.1 Obtención de la regla de evolución

Supongamos que una cuerda es una sucesión de puntos con masa específica unidos por resortes (sistema masa-resorte), en el cual la masa de la cuerda se

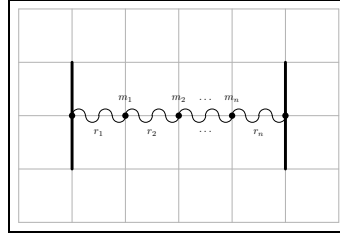


Fig. 4. Representación de una cuerda como un sistema masa-resorte.

encuentra distribuida en los puntos de unión y no en los resortes y sus extremos se encuentran fijos a una superficie (Figura 4).

Llamaremos *deq* o distancia de equilibrio, a la distancia de separación entre las masas, o longitud del resorte, que conforman la cuerda, cuando estas se encuentran en reposo.

Para el sistema de cuerda vibrante con deflexión inicial triangular (Figura 3) que se quiere estudiar, tomaremos las condiciones iniciales de posición descritas en la ecuación (5) y de velocidad descrita en la ecuación (6), de este modo tenemos que cada partícula interna de la cuerda, está sometida a dos fuerzas que actúan en dirección de los vectores $\vec{\Delta r}_1$ y $\vec{\Delta r}_2$ (Figura 5).

Es necesario conocer las fuerzas que se ejercen sobre la partícula m_i con el objeto de encontrar la velocidad con la que se va a mover y la posición final que tendrá dicha partícula transcurrido un tiempo t .

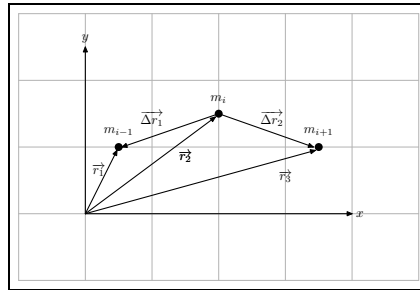


Fig. 5. Fuerzas ejercidas sobre la partícula m_i por sus vecinos.

Procedemos a encontrar $\vec{\Delta r}_1$ y se procede de forma análoga para $\vec{\Delta r}_2$. Tomando en cuenta la Figura 5, vemos que:

$$\vec{r}_2 + \vec{\Delta r}_1 = \vec{r}_1 \Rightarrow \vec{\Delta r}_1 = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 \quad (8)$$

El vector $\overrightarrow{\Delta r_1}$ puede representarse como el producto de un vector unitario $\widehat{\Delta r_1}$ de la misma dirección y sentido que el vector, multiplicado por el módulo de $\overrightarrow{\Delta r_1}$ [10] entonces:

$$\overrightarrow{\Delta r_1} = |\overrightarrow{\Delta r_1}| \widehat{\Delta r_1}$$

Tomando en cuenta que el módulo de $\overrightarrow{\Delta r_1}$, representa la distancia de separación de las masas, se puede escribir este módulo como la suma de la distancia de equilibrio o longitud del resorte más la deformación del resorte debida al cambio de posición de la masa central, tenemos entonces que;

$$|\overrightarrow{\Delta r_1}| \widehat{\Delta r_1} = (deg + \Delta deg) \widehat{\Delta r_1}$$

Donde Δdeg es el incremento presentado por el resorte de unión entre las masas m_i y m_{i-1} en dirección del vector unitario, es necesario encontrar este incremento a fin de conocer en incremento de la fuerza desde el punto de equilibrio al punto de análisis, por lo que tenemos,

$$|\overrightarrow{\Delta r_1}| \widehat{\Delta r_1} \Rightarrow \Delta deg \widehat{\Delta r_1} = \left(|\overrightarrow{\Delta r_1}| - deg \right) \widehat{\Delta r_1} \quad (9)$$

Ambos lados de la ecuación (9) son vectores, su representación en componentes son:

$$\Delta deg \widehat{\Delta r_1} = (\Delta x_1, \Delta y_1) \quad (10)$$

$$\left(|\overrightarrow{\Delta r_1}| - deg \right) \widehat{\Delta r_1} = \left(|\overrightarrow{\Delta r_1}| - deg \right) \left(\frac{x_{i-1} - x_i}{|\overrightarrow{\Delta r_1}|}, \frac{y_{i-1} - y_i}{|\overrightarrow{\Delta r_1}|} \right) \quad (11)$$

Dado que dos vectores son iguales si y solo si, sus componentes respectivas son iguales, entonces podemos igualar componente a componente del vector (10) con el vector (11), por lo que tenemos:

$$\Delta x_1 = \left(|\overrightarrow{\Delta r_1}| - deg \right) \frac{x_{i-1} - x_i}{|\overrightarrow{\Delta r_1}|} \quad (12)$$

$$\Delta y_1 = \left(|\overrightarrow{\Delta r_1}| - deg \right) \frac{y_{i-1} - y_i}{|\overrightarrow{\Delta r_1}|} \quad (13)$$

De ésta manera obtenemos las componentes Δx_1 y Δy_1 que son los incrementos de desplazamiento en los ejes X y Y de la partícula m_i para $\overrightarrow{\Delta r_1}$. Procedemos de la misma forma para encontrar Δx_2 y Δy_2 para $\overrightarrow{\Delta r_2}$.

Por *ley de Hooke* para un sistema masa resorte en una dimensión, tenemos que:

$$F = -k\Delta x \quad (14)$$

En general, para la partícula m_i , existen dos fuerzas ejercidas por m_{i-1} en dirección de $\overrightarrow{\Delta r_1}$, debido a las componentes x y y del vector, y dos fuerzas ejercidas por m_{i+1} en dirección de $\overrightarrow{\Delta r_2}$, entonces sustituyendo los valores encontrados

en la ecuación (12) y la ecuación (13) y sus análogos para Δx_2 y Δy_2 en la ecuación (14) obtenemos:

$$F_x = -k_1 \Delta x_1 - k_2 \Delta x_2$$

Suponiendo que los resortes que unen a las masas de la cuerda son exactamente iguales, entonces $-k_1 = -k_2 = -k$:

$$F_x = -k(\Delta x_1 + \Delta x_2) \quad (15)$$

Análogamente:

$$F_y = -k(\Delta y_1 + \Delta y_2) \quad (16)$$

Estas fuerzas son las que actúan sobre la partícula m_i , contribuyendo a su aceleración en el momento en que la partícula se encuentra oscilando y permiten acelerar a la misma. Utilizando la *segunda ley de Newton* $\vec{F} = m\vec{a}$, y la ecuación de velocidad para un movimiento uniformemente acelerado, tenemos que la velocidad final para una partícula está dada en función de su velocidad inicial y de la aceleración que siente la partícula en un instante de tiempo t , en consecuencia:

$$\begin{aligned} \vec{v}_f &= \vec{v}_i + \vec{a}t \\ &= \vec{v}_i + \frac{\vec{F}}{m}t \end{aligned}$$

Haciendo una separación de componentes y empleando los valores de fuerza encontrados en las ecuaciones (15) y (16), obtenemos las velocidades por componente para m_i que son;

$$v_{fx} = v_{ix} + \frac{F_x}{m}t \quad (17)$$

$$v_{fy} = v_{iy} + \frac{F_y}{m}t \quad (18)$$

En este punto hemos encontrado la velocidad que tendrá la partícula m_i transcurrido un tiempo t , esto nos proporciona la información necesaria para calcular la nueva posición de la partícula para el mismo instante de tiempo, para esto empleando los resultados de las ecuaciones (17) y (18) y la ecuación de desplazamiento uniformemente acelerado:

$$x_{fi} = x_i + v_{ix}t + \frac{1}{2} \frac{F_x}{m}t^2 \quad (19)$$

$$y_{fi} = y_i + v_{iy}t + \frac{1}{2} \frac{F_y}{m}t^2 \quad (20)$$

Las ecuaciones (17), (18), (19) y (20), son las que se emplean en la definición de la función de evolución para el AC propuesto en la siguiente sección.

4 Definición del Autómata Celular para una Cuerda Vibrante

Basado en la definición 14, el modelo de AC para un sistema de cuerda vibrante fijo en los extremos de una longitud l con una deflexión inicial triangular de altura h con $0 < h < l$ es una 4-tupla $AC = (L, S, V, \Phi)$ donde cada célula $c \in L$ está definida por su masa, posición inicial y su velocidad inicial, cuando la cuerda está en reposo, siendo:

L : Es una retícula regular y $L = \{c_i \in \mathbb{C}^1 : i = 1, 2, \dots, n\}$

$S = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{P_{ci}^t} : \text{vector de posición en } t \\ \overrightarrow{V_{ci}^t} : \text{velocidad de } c \text{ en } t. \end{array} \right\} \forall c_i \in \mathbb{C}^i$

V : $V = \{(c_{i-1}, c_i, c_{i+1})\}$

Φ : $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$,

$$\Phi = \left\{ \begin{array}{l} \text{a) } \overrightarrow{P_{ci}^{t+1}} = \overrightarrow{P_{ci}^t} + \overrightarrow{V_{ci}^t}t + \frac{\overrightarrow{F_{i-1}^t} + \overrightarrow{F_{i+1}^t}}{2m}t^2 \\ \text{b) } \overrightarrow{V_{ci}^{t+1}} = \overrightarrow{V_{ci}^t} + \frac{\overrightarrow{F_{i-1}^t} + \overrightarrow{F_{i+1}^t}}{m}t \end{array} \right\}$$

donde: $\overrightarrow{F_{i-1}^t} + \overrightarrow{F_{i+1}^t}$ es la fuerza que las células c_{i+1} y c_{i-1} ejercen sobre c_i en el tiempo t ; $\overrightarrow{P_{ci}^{t+1}}$, es la posición final de la célula en el espacio. y $\overrightarrow{V_{ci}^{t+1}}$, es la velocidad final de la célula en el tiempo $t + 1$.

La función de transición Φ , está compuesta por dos reglas fundamentales, ambas reglas se aplican simultáneamente a todas las células que conforman la lattice.

La regla *a*) define la posición de la célula en el tiempo $t + 1$, tomando la velocidad en el tiempo t , esta posición se actualiza, siendo la nueva posición inicial para $t + 2$ y así sucesivamente. Similarmente, para *b*) la velocidad final para el tiempo $t + 1$ se actualiza, siendo la velocidad inicial para el tiempo $t + 2$.

4.1 Obtención experimental de la constante k_l

Se toma como base para obtener la constante k_l , una cuerda de longitud $l = 0.90m$ sin ninguna tensión aplicada y una masa $m_c = 0.00507kg$. De forma experimental, se sujeta la cuerda l en sus extremos, y aplicando una fuerza $f = mg$, en $\frac{l}{2}$. Esta fuerza cambiará al variar la masa m , como se muestra en la Figura 6.

donde:

- l_e , es la longitud alcanzada por la cuerda al aplicarle la fuerza del peso.
- h , la longitud que se desplaza el punto $\frac{l}{2}$, desde su posición de origen.
- m , la masa variable aplicada en el experimento.

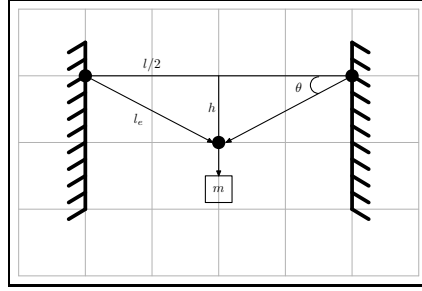


Fig. 6. Esquema experimental para obtener la constante k_l de la cuerda.

Realizado el ajuste por mínimos cuadrados obtenemos que $k_l = 3963.63$, que es la constante de restitución de la cuerda. Con este resultado, es posible calcular la constante k_c que se utiliza en el AC propuesto. Se tiene que:

$$k_l = \frac{1}{\frac{1}{k_{c1}} + \frac{1}{k_{c2}} + \dots + \frac{1}{k_{cn}}} = \frac{k_c}{n}$$

Lo que implica que:

$$k_c = n \cdot k_l \quad (21)$$

Es decir, la constante de restitución de un resorte (ecuación 21), para el modelo de AC propuesto, es directamente proporcional al número de resortes dentro del sistema por la constante de restitución de la cuerda.

5 Comparación ente el modelo tradicional y el modelo AC propuesto

Para llevar a cabo la comparación entre el AC y la ecuación de movimiento encontrada (vea pag. 6) que satisface la ec. diferencial (2), es necesario definir las condiciones iniciales con las que se iniciará la ecuación; pensando en una cuerda de guitarra, se tomarán las condiciones en las que vibra una cuerda sexta:

- l : longitud de la cuerda $0.90m$ la cual se estira $4mm$.
- h : desplazamiento desde el origen del punto medio $h = 5mm$.
- x : punto que se verifica su oscilación $x = \frac{l}{2}$.
- T : tensión de la cuerda una vez estirada $T = 15.84N$.
- m : masa de la cuerda $masa = 0.00507kg$.
- ρ : densidad lineal de la cuerda $\rho = \frac{m}{l}$.
- c : constante definida en la ecuación que rige el movimiento con $c = \sqrt{\frac{T}{\rho}} = 53.144$.

Sustituyendo estos valores en la ecuación (7), tenemos:

$$u\left(\frac{l}{2}, t\right) = \frac{8 \cdot 0.005}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin\left(\frac{n\pi}{0.904} \frac{0.904}{2}\right) \sin\left(\frac{n}{2}\pi\right) \cos\left(\frac{n\pi}{0.904} 53.144 \cdot t\right)$$

Simulando para $t = 0, \dots, 3$, la ecuación $u(\frac{l}{2}, t)$, se genera la gráfica de la Figura 7, en la cual se puede ver un movimiento oscilatorio del punto $x = \frac{l}{2}$. En la gráfica de la Figura 8 se presenta el movimiento de la célula $c_{\frac{l}{2}}$ del modelo del AC desarrollado.

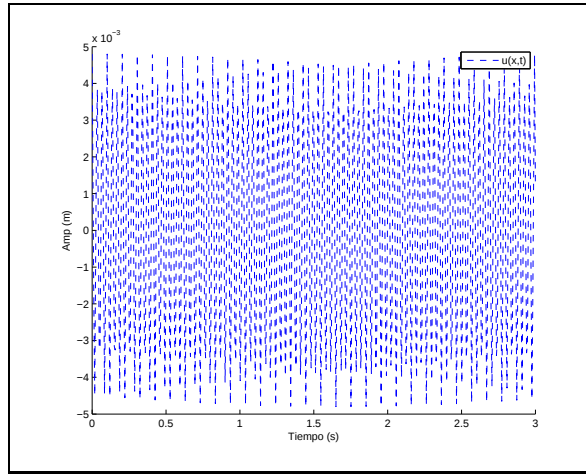


Fig. 7. Gráfica generada por la ecuación de movimiento $u(\frac{l}{2}, t) : t = 0, \dots, 3$.

Haciendo una comparación de los modelos y sobreponiendo las gráficas sinusoidales se obtiene la gráfica de la Figura 9, puede observarse que tanto la trayectoria que sigue el punto $\frac{l}{2}$, correspondiente al modelo matemático, como la trayectoria de la célula $c_{\frac{l}{2}}$, tienen una correspondencia de fase.

Obteniendo los espectros de frecuencia para ambas señales y graficándolos, se aprecia que la gráfica de la Figura 10, los espectros de frecuencia de las dos señales se encuentran prácticamente empalmadas, observando la gráfica de la Figura 11, que presenta las frecuencias de la frecuencia fundamental y de las primeras dos armónicas es visible que hasta la segunda armónica se aprecia un ligero defasamiento de las gráficas.

En la gráfica de la Figura 12, puede observarse que existe una perfecta superposición de las frecuencias fundamentales de ambas señales la cual se encuentra al rededor de los $30Hz$.

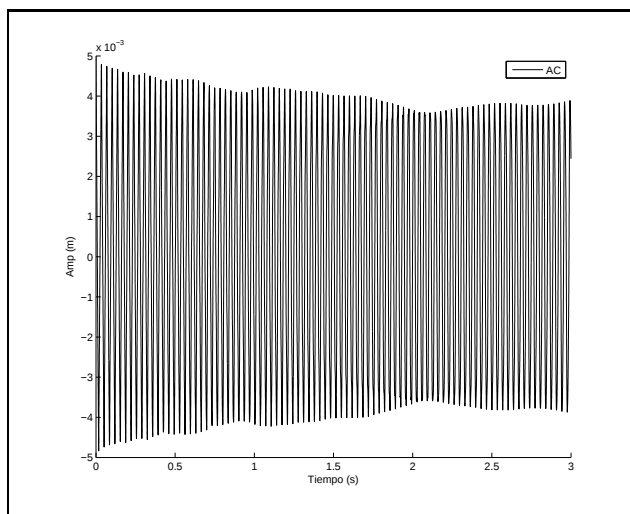


Fig. 8. Gráfica generada por el modelo de AC propuesto durante un tiempo $t = 0, \dots, 3$.

Matemáticamente, el primer término de la sumatoria de la ecuación (7), $u(x, t)$, cuando $n = 1$, define la frecuencia angular o fundamental de la señal por lo que $\cos(\omega t) = \cos\left(\frac{\pi}{0.904} 53.144 \cdot t\right)$ siendo ω la frecuencia fundamental; dado que $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f \Rightarrow f = \frac{\omega}{2\pi}$ donde T es el periodo y f la frecuencia. Sustituyendo datos tenemos:

$$f = \frac{\frac{\pi}{0.904} 53.144}{2\pi} = \frac{53.144\pi}{2\pi 0.904} = 29.4 Hz \quad (22)$$

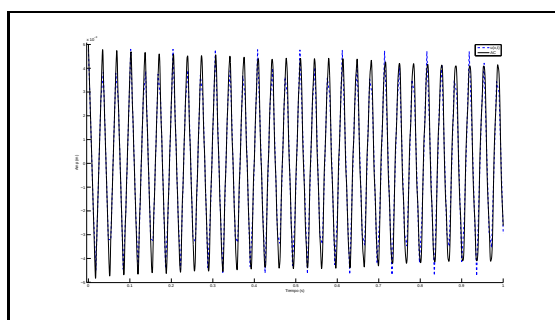


Fig. 9. Gráfica generada por la la superposición de las gráficas sinusoidales ampliada.

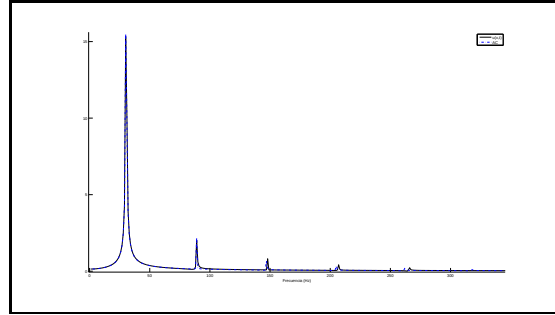


Fig. 10. Gráfica generada por la superposición de los espectros de frecuencia obtenidos de las señales del modelo matemático y el modelo AC.

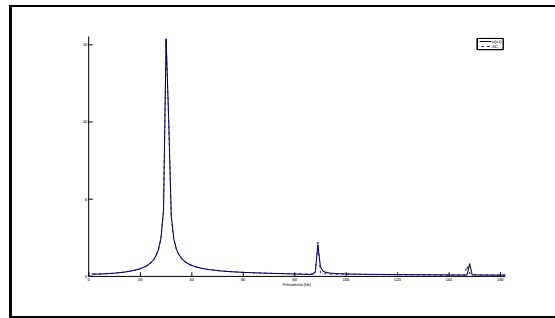


Fig. 11. Gráfica de frecuencia fundamental y dos primeras armónicas.

lo cual es congruente con la gráfica de espectros de frecuencia con la frecuencia fundamental.

6 Conclusiones

Cuando se estudian sistemas físicos a través de ecuaciones diferenciales parciales, usualmente debido a las no linealidades intrínsecas al modelo continuo, la solución de estos sistemas puede tornarse en extremo complicada. En este trabajo hemos mostrado como, modelando un sistema masa-resorte en el cual la masa de la cuerda se encuentra distribuida en los puntos de unión y no en los resortes, mediante un autómata celular con reglas de transición simples se producen los mismos resultados que el modelo analítico. Es importante notar que cuando tomamos parámetros de una cuerda real de una guitarra y los sustituimos en la ecuación (7) al graficar esta función que representa el desplazamiento lateral $u(x, t)$ obtenida de manera analítica y la obtenida por el autómata celular (figura 9) los resultados son congruentes. Una manera de verificar la exactitud de ambos modelos fue encontrar el espectro de frecuencia de ambos modelos y obtener la frecuencia fundamental además de 2 armónicas principales. En la

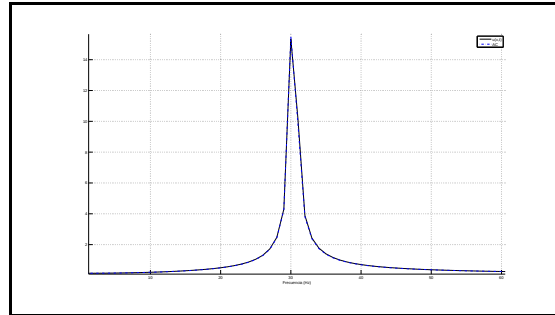


Fig. 12. Gráfica de frecuencias fundamentales.

gráfica de la figura 12 se puede observar que la frecuencia fundamental se encuentra a los $30Hz$, lo cual corresponde de manera casi perfecta con el cálculo analítico de esta frecuencia fundamental. Así mismo, se puede ver en esta misma gráfica la concordancia entre las otras dos armónicas principales.

El modelo de AC para una cuerda vibrante resulta útil una vez que se cuentan con los datos necesarios para llevar a cabo una simulación ya que no está sujeto a las condiciones iniciales de la cuerda, como sucede en el caso de la ecuación diferencial que representa el movimiento, el AC solo es desarrollado una vez y puede asignarsele cualquier condición inicial.

Para el caso de la ecuación diferencial, es necesario el conocimiento de las condiciones iniciales de la cuerda que se pretende simular ya que el resultado de la solución depende de estos datos, por lo que el AC es una herramienta que puede ser igualmente efectiva que el modelo matemático o una alternativa a las ecuaciones diferenciales. A lo largo de las pruebas, el modelo resultó ser efectivo con respecto al modelo analítico por lo que la simulación de movimiento amortiguado es factible tomando en cuenta el factor de amortiguamiento según el medio en donde oscile la cuerda y la fricción que el medio ejerce sobre las células que conformen la cuerda. Cuerdas como la de los instrumentos musicales pueden ser simuladas con el AC, si se aplica define un coeficiente de fricción que amortigüe la amplitud de la oscilación, para esto es necesario tomar en cuenta el diámetro de la cuerda y la forma de las células para definir el coeficiente de amortiguamiento del aire.

No cabe ninguna duda que el éxito obtenido a lo largo de la historia del modelado de fenómenos físicos ha sido a través de ecuaciones diferenciales. Sin embargo en este trabajo se muestra que la dinámica de un fenómeno simulado computacionalmente como la suma de efectos colectivos de elementos discretos representados por un autómata celular, es parecida a la que puede generar el modelo analítico. Consideramos que esto es de mucha importancia ya que, en la actualidad existen muchos fenómenos físicos representados por ecuaciones diferenciales no parciales que podrían estudiarse utilizando modelos discretos, como los autómatas celulares, que si bien tienen reglas de transición simples utilizan el gran poder de cómputo que dan los procesadores actuales.

Es posible ampliar el modelo de AC propuesto para simular membranas en 3-dimensiones implementando una retícula de 2-dimensiones en el AC, e incluyendo un componente más en el vector de posición y de fuerza, empleando una vecindad de Moore para simular la cohesión de las células en la membrana.

Agradecimientos: Queremos agradecer al CONACyT su valioso apoyo para la realización de este trabajo. Así mismo los autores agradecen al EDI, y COFAA por su apoyo económico sin el cual este trabajo no se hubiera podido realizar.

Referencias

1. Y. Bar-Yam. *"Dynamics of Complex Systems"*. Addison-Wesley, USA, 1997.
2. W.E. Boyce. *"Ecuaciones Diferenciales y Problemas con Valores en la Frontera"*. Ed. Limusa, Mexico, 1990.
3. B. Chopard and et al. *"Cellular Automata Modeling of Physical Systems"*. Cambridge University Press, USA, 1998.
4. R. Espericueta. *"Cellular Automata Dynamics Explorations in Parallel Processing"*. Bakersfield College, USA, 1997.
5. P. Fishwick. "Simulation Model Design". *Proceeding of the Winter Simulation Conference*, 1995.
6. H. P. Hsu. *"Anlisis de Fourier"*. Prentice Hall, México, 1998.
7. J. Johannes and R. Shannon. "Systems simulation: the art and science". *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*, vol. 6(10):pp. 723–724., 1976.
8. M. Mitchell. "Computation in cellular automata: A selected review". *Nonstandard Computation*, pages 95–140, 1998. Weinheim: VCH Verlagsgesellschaft.
9. S. Motta and V. Brusic. *"Mathamatical Modelling of the Immune System"*. Springer, USA, 2004.
10. M. R. Spiegel. *"Anlisis Vectorial"*. Schaum's. McGraw Hill, México, 1991.
11. T. Toffoli. "Occam, Turing, von Neumann, Jaynes: How much can you get for how little? (A conceptual introduction to cellular automata)". *InterJournal, MIT*, December 1994. Cambridge, MA.
12. S. Wolfram. "statistical mechanics of cellular automata". *Reviews of Modern Physics*, (55):601–644, 1983.
13. S. Wolfram. "cellular automata as models complexity". *Nature*, (311):419–424, 1984.